K=ℝ ou ℂ. E K-ev de dim. finie n (*). f∈L(E).

I. Eléments propres, polynôme caractéristique (Monier MP).

Def 1: Soit λ∈K. On dit que λ est une **valeur propre** de f ssi: ∃x∈E, (x≠0 et f(x)=λx). (1)
x est alors appelé **vecteur propre** de f associé à λ.
On appelle **Spectre** de f, et on note Sp(f) l'ensemble des valeurs propres de f.
E_λ=Ker(f-λId_E) est le sous-espace propre associé à λ (2)

Remarque: Soit A=Mat(f) dans une base de E, les valeurs propres et vecteurs propres de A sont ceux de f.

Prop 1: Soient $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_N$ des valeurs propres de f deux à deux distinctes. Les $E_{\lambda_1}, E_{\lambda_2}, \ldots E_{\lambda_N}$ sont en **somme directe**.

Def 2: L'application de K dans K: $\lambda \mapsto \det(f - \lambda I_n)$, est un polynôme appelé **polynôme caractéristique** de f et noté χ_f (ou de A, noté χ_A).

Prop 2: $Sp_K(f) = \chi_f^{-1}(\{0\})$, i.e. les **zéros** du polynôme caractéristique sont les **valeurs propres** de f.

Exemple: (Monier) Rechercher les valeurs propres et les vecteurs propres de f dont la matrice est: . $\begin{pmatrix} 8 & 12 & 10 \\ -9 & -22 & -22 \\ 9 & 18 & 17 \end{pmatrix}$

Prop 3: $0 \leq$ dim. de $E_\lambda \leq$ multiplicité de λ dans χ_f.

Remarque: (Sorosina p240)
Si n=2, $\chi_A(X) = X^2 - tr(A)X + \det(A)$
Si n=3, $\chi_A(X) = -X^3 + tr(A)X^2 - tr(com(A))X + \det(A)$

II. Diagonalisation (Monier MP).

Def 3: f est **diagonalisable** ssi ∃B base de E tq $Mat_B(f)$ soit diagonale. i.e. ∃ P∈GL_n(K), D∈D_n(K) tq $A = PDP^{-1}$.

Prop 4: Les propositions suivantes sont équivalentes:
(i) f est diagonalisable
(ii) Il existe une base de E formée de vect. ppes de f
(iii) La somme des E_λ de f est égale à E
(iv) La somme des dimensions des E_λ est égale à dimE.

Prop 4 bis: f est diagonalisable ssi χ_f est scindé sur K, et ∀λ∈Sp(f), dim(E_λ) est égale à l'ordre de multiplicité de λ dans χ_f.

Prop 5: f admet n val. ppes distinctes ⇒ f diagonalisable

Exemple: (Monier p.55). $Mat(f) = A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Cas particulier: **matrice nilpotente** (Sorosina p.261). (3)

Prop 6: A∈M_n(K) est nilpotente ssi $\chi_A(X) = (-1)^n X^n$.
Donc la seule matrice nilpotente diagonalisable est la matrice nulle. (voir aussi Gourdon p.176).

III. Trigonalisation.

Def 4: f est **trigonalisable** ssi ∃B base de E tq $Mat_B(f)$ soit triangulaire.

Prop 7: Les propositions suivantes sont équivalentes:
(i) f est trigonalisable
(ii) χ_f est scindé sur K. (tjrs vrai ds ℂ alébriq[t] clos).

IV. Applications.

A. Puissances, exp. d'une matrice carrée.

Prop 8: si A ∈M_n(K) est diagonalisable, soient P∈GL_n(K), D∈D_n(K) tq $A = PDP^{-1}$.
Alors ∀k∈ℕ, $A^k = PD^kP^{-1}$
De même si A est trigonalisable, soient P∈GL_n(K), T triangulaire tq $A = PTP^{-1}$. Alors ∀k∈ℕ, $A^k = PT^kP^{-1}$

Passer par une diagonalisation, une trigonalisation pour calculer les puissances successives de A peut être utile lors de l'étude de polynômes de matrices, ou d'exponentielle de matrice.

Def 5: on appelle **exponentielle**, et on note exp, l'application de M_n(K) dans M_n(K) définie par:
$$\forall A \in M_n(K),\ \exp(A) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} A^k .$$

Prop 9: $\forall A \in M_n(K),\ \forall P \in GL_n(K),\ e^{P^{-1}AP} = P^{-1}e^A P$

B. Suites réc. lin. simultanées du 1er ordre

Exemple: $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}, (v_n)_{n\in\mathbb{N}}, (w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suites réelles définies par: $u_0 = 0$; $v_0 = 22$; $w_0 = 22$ et ∀n∈ℕ:
$$\begin{cases} u_{n+1} = \frac{1}{4}(2u_n + v_n + w_n) \\ v_{n+1} = \frac{1}{3}(u_n + v_n + w_n) \\ w_{n+1} = \frac{1}{4}(u_n + v_n + 2w_n) \end{cases}, \text{ on note } A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Pour n∈ℕ, on pose $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$.

Alors $\forall n\in\mathbb{N}$, $X^n = A^n.X_0$. La diagonalisation de A facilite le calcul de ses puissances successives.

C. Suites réc. linéaires à coefs constants.

Exemple:

$u_0 = 1;\ u_1 = 1;\ u_2 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+3} = 45u_n - 39u_{n+1} + 11u_{n+2}$

On pose $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 45 & -39 & 11 \end{pmatrix}$, trigonalisable.

Posant $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \\ u_{n+2} \end{pmatrix}$, on a $\forall n\in\mathbb{N}$, $X^n = A^n.X_0$.

La trigonalisation de A facilite le calcul de ses puissances successives.

D. Syst. diffs du 1er ordre à coefs constants.

(Monier 4 d'ANALYSE – Leçon 225).

Prop 10: $A\in M_n(K)$ diagonalisable. Solution g^{ale} de (E_0):

$$\forall t\in I,\ X(t) = \sum_{i=1}^{n} c_i.e^{\lambda_i t}.V_i\ ,$$

où: $\lambda_1,\ldots\lambda_n$ val. ppes de A; $V_1,\ldots V_n$ base de vect. ppes, $c_1,\ldots c_n \in K$ quelconques.

Si A est trigonalisable, résoudre (E0) revient à résoudre un système différentiel en cascade.

V. Décomposition de Dunford.

Th 1: Soit $f\in L(E)$ tq. χ_f soit scindé sur K. Il existe un couple unique (d,v) de $(L(E))^2$ tel que:

$$\begin{cases} f = d + v \\ d \text{ est diagonalisable} \\ v \text{ est nilpotent} \\ d \circ v = v \circ d \end{cases}$$

De plus d et v sont des polynômes en f et $\chi_d = \chi_f$.

Corollaire: Si χ_f est scindé, on note $\lambda_1,\ldots\lambda_p$ ses valeurs propres de multiplicité respectives $\omega_1,\ldots\omega_p$. Alors il existe une base de E dans laquelle la matrice de f est de la forme:

$$\begin{pmatrix} \begin{array}{|ccc|} \lambda_1 & & \cdots \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_1 \\ \hline \end{array} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \begin{array}{|ccc} \hline \lambda_p & & \cdots \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_p \end{array} \end{pmatrix}$$

Application:

Def 6: $A\in M_n(\mathbb{C})$, on appelle rayon spectral de A le réel $\rho(A) \geq 0$ défini par $\rho(A) = \underset{\lambda\in Sp(A)}{Max} |\lambda|$.

Prop 11: $\forall A\in M_n(\mathbb{C})$, $\left(A^p \underset{p\infty}{\rightarrow} 0 \Leftrightarrow \rho(A) < 1\right)$

Il y a ensuite la réduction de Jordan. On fait d'abord une décomposition de Dunford, puis, dans une base convenable, on peut en écrire la partie nilpotente comme une diagonale de blocs de "matrices nilpotentes de Jordan" de la forme $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ & \ddots & 1 \\ 0 & & 0 \end{pmatrix}$, *de tailles décroissantes.* (Voir Grifone).

VI. Notes.

(*) En dimension infinie, la notion de matrice n'a pas de sens.

(1) (Sorosina p.239) Une matrice (ou un endomorphisme en dim. finie) n'admet pas toujours de valeurs propres. Contre-ex. $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, de poly caract X^2+1 sans racines $\mathbb{R}$, ou encore A rotation d'angle $\pi/2$, dons aucune droite de $\mathbb{R}^2$ n'est stable par A

(2) E_λ , sous-espace propre associé à λ, est formé des vecteurs propres de λ, et de 0 (un vect. ppe n'est par déf° jamais nul).

(3) Matrice nilpotente: Il existe une puissance égale à la matrice nulle.